

Ларин:

19. 15-го января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

19.1. («реальный») 15 июня планируется взять кредит в банке в размере 9 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1 января на имеющуюся сумму задолженности начисляется 20 % ;
- с февраля по май необходимо выплатить часть долга;
- выплаты подбираются таким образом, чтобы основная часть долга уменьшалась на одну и ту же сумму.

Найдите общую сумму выплат банку, если известно, что самый большой платеж составил 3,6 млн руб.

Ответ: 14,4 млн руб.

Решение:

1 способ. Поскольку проценты начисляются на оставшуюся часть основного долга, то они постепенно уменьшаются, а погашение основного долга идет равными суммами. Значит, самый большой платеж – это первый платеж. И он равен 3,6 млн. руб.

Найдем на сколько ежегодно уменьшается основной долг.

$$9 \cdot 1,2 = 10,8 \text{ – долг после первого начисления процентов.}$$

$$10,8 - 3,6 = 7,2 \text{ – долг после первого погашения.}$$

$$9 - 7,2 = 1,8 \text{ – сумма, на которую ежегодно будет уменьшаться долг.}$$

2 год.

$$7,2 - 1,8 = 5,4 \text{ – долг после второго погашения.}$$

$$7,2 \cdot 0,2 = 1,44 \text{ – размер процентов, начисленных на остаток } 7,2$$

$$1,8 + 1,44 = 3,24 \text{ – размер второй выплаты.}$$

3 год.

$5,4 - 1,8 = 3,6$ – долг после третьего погашения.

$5,4 \cdot 0,2 = 1,08$ – размер процентов, начисленных на остаток 5,4

$1,8 + 1,08 = \mathbf{2,88}$ – размер третьей выплаты.

4 год.

$3,6 - 1,8 = 1,8$ – долг после 4-го погашения.

$3,6 \cdot 0,2 = 0,72$ – размер процентов, начисленных на остаток 3,6

$1,8 + 0,72 = \mathbf{2,52}$ – размер 4-й выплаты.

5 год.

$1,8 - 1,8 = 0$ – долг после 5-го погашения. Это означает, что кредит был погашен за 5 лет.

$1,8 \cdot 0,2 = 0,36$ – размер процентов, начисленных на остаток 1,8

$1,8 + 0,36 = \mathbf{2,16}$ – размер 5-й выплаты.

Общая сумма выплат составила:

$$3,6 + 3,24 + 2,88 + 2,52 + 2,16 = 14,4 \text{ (млн. руб)}$$

2 способ.

Т.к. долг уменьшается на одну и ту же величину – назовем ее $\text{const} = c$. По условию каждый год нужно погашать начисленный процент и выплачивать c .

Максимальный годовой платеж был в первый год, т.к. в первый год сумма, начисленная за счет процентов, была максимальной.

$$\text{Т.е. } 9 \cdot 0,2 + c = 3,6.$$

$$1,8 + c = 3,6$$

$$c = 1,8$$

Значит долг должен быть выплачен за $9 : c = 9 : 1,8 = 5$ (лет).

$$1 \text{ год. } 9 \cdot 0,2 + c$$

$$2 \text{ год. } (9 - c) \cdot 0,2 + c$$

$$3 \text{ год. } (9 - 2c) \cdot 0,2 + c$$

$$4 \text{ год. } (9 - 3c) \cdot 0,2 + c$$

$$5 \text{ год. } (9 - 4c) \cdot 0,2 + c$$

$$\begin{aligned} \text{Сумма выплат составит: } & 5 \cdot 9 \cdot 0,2 - 0,2(c + 2c + 3c + 4c) + 5c = 9 - 0,2 \cdot 10c + 5c = 9 + 3c = \\ & = 9 + 3 \cdot 1,8 = 9 + 5,4 = 14,4 \text{ (млн. руб)} \end{aligned}$$

3 способ.

Пусть выплаты продолжались n лет.

Долг уменьшался на одну и ту же величину, т.е. на $\frac{9}{n}$ млн. руб в год.

Составим таблицу выплат, остатков долга и начислений процентов на оставшуюся сумму (в млн. руб.)

Год	Выплата	Остаток	%, начисленные на остаток
0	0	$9 - \frac{9 \cdot 0}{n}$	$\left(9 - \frac{9 \cdot 0}{n}\right) \cdot 0,2$
1	$\frac{9}{n}$	$9 - \frac{9 \cdot 1}{n}$	$\left(9 - \frac{9 \cdot 1}{n}\right) \cdot 0,2$
2	$\frac{9}{n}$	$9 - \frac{9 \cdot 2}{n}$	$\left(9 - \frac{9 \cdot 2}{n}\right) \cdot 0,2$
...
$n-1$	$\frac{9}{n}$	$9 - \frac{9 \cdot (n-1)}{n}$	$\left(9 - \frac{9 \cdot (n-1)}{n}\right) \cdot 0,2$
n	$\frac{9}{n}$	$9 - \frac{9 \cdot n}{n} = 0$	0

Если сложить все числа, стоящие в правом столбце, то мы получим величину переплаты:

$$\begin{aligned} & \left(9 - \frac{9 \cdot 0}{n}\right) \cdot 0,2 + \left(9 - \frac{9 \cdot 1}{n}\right) \cdot 0,2 + \left(9 - \frac{9 \cdot 2}{n}\right) \cdot 0,2 + \dots + \left(9 - \frac{9 \cdot (n-1)}{n}\right) \cdot 0,2 = \\ & = 9 \cdot 0,2 \cdot \left(\left(1 - \frac{0}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \right) = \\ & = 1,8 \cdot \left(1 \cdot n - \left(\frac{0}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) \right) = 1,8 \cdot \left(n - \frac{1}{n} (0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)) \right) = \\ & = 1,8 \cdot \left(n - \frac{1}{n} \cdot \frac{0 + (n-1)}{2} \cdot n \right) = 1,8 \cdot \left(n - \frac{n-1}{2} \right) = 1,8 \cdot \frac{n+1}{2} = 0,9(n+1) \end{aligned}$$

А общая сумма выплат состоит из возврата долга (т.е. 9 млн руб.) и оплаты процентов размером $0,9(n+1)$ млн руб. Итого:

$$9 + 0,9(n+1) = 9,9 + 0,9n \text{ (млн руб.)}$$

Если вспомнить, что наибольшая выплата была 3,6 млн руб., и это была самая первая выплата, то можно получить, что $n = 5$.

$$\text{Тогда сумма переплат составит: } 9,9 + 0,9 \cdot 5 = 14,4 \text{ (млн руб.)}$$

Полезные выводы: если сумма, взятая в банке, равна S млн руб., а проценты обозначить r , то переплата за n лет составит $\frac{Sr(n+1)}{2}$ млн руб.

$$\text{Общая сумма выплат составит } S + \frac{Sr(n+1)}{2}$$

19.2. («реальный») 15 июня планируется взять кредит в банке в размере 9 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1 января на имеющуюся сумму задолженности начисляется 10 % ;
- с февраля по май необходимо выплатить часть долга;
- выплаты подбираются таким образом, чтобы основная часть долга уменьшалась на одну и ту же сумму.

Найдите общую сумму выплат банку, если известно, что самый большой платеж составил 1,5 млн руб.

Ответ: 16,2 млн руб.

19.3. («реальный») 15 июня планируется взять кредит в банке в размере 17 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1 января на имеющуюся сумму задолженности начисляется 10 % ;
- с февраля по май необходимо выплатить часть долга;
- выплаты подбираются таким образом, чтобы основная часть долга уменьшалась на одну и ту же сумму.

Найдите общую сумму выплат банку, если известно, что самый большой платеж составил 3,4 млн руб.

Ответ: 26,35 млн руб.